

El proyecto Eratóstenes. Guía para el estudiante.

En esta actividad vas a trabajar en colaboración con estudiantes de otra escuela para medir el radio de la Tierra. Vas a usar los mismos métodos y principios que Eratóstenes usó hace más de dos mil años.



Eratóstenes fue un griego que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III A.C. Sabía que un día determinado, al mediodía, en Siena (Syene en el mapa, actualmente Aswan), una ciudad ubicada a una distancia considerable de Alejandría hacia el sur, la luz del sol entraba de forma totalmente vertical dentro de un pozo profundo. Esta observación significaba que el sol se encontraba exactamente sobre la ciudad de Siena, como se muestra en la Figura 1. Eratóstenes también sabía que mientras que esto ocurría en Siena, no sucedía lo mismo en Alejandría (ver Figura 2). Noten que en ambas figuras los rayos del sol son todos paralelos entre sí.



Figura 1:

Los rayos del sol entran de modo perfectamente vertical dentro del pozo ubicado en Siena, cuando el sol está exactamente sobre esta ciudad (el 21 de junio al mediodía). En ese momento, las paredes no proyectan sombra alguna.

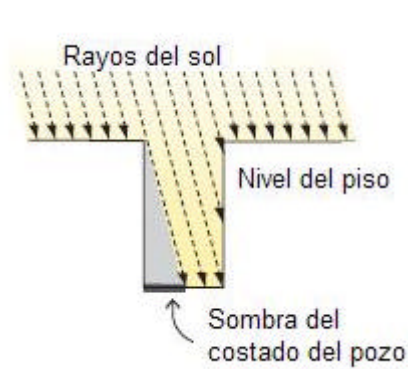


Figura 2:

En el mismo momento que en Siena los rayos del sol entran al pozo como en la Figura 1, en Alejandría los rayos entran formando un ángulo con la vertical. Acá el sol no está directamente sobre la ciudad y las paredes proyectan cierta sombra (que en el dibujo está exagerada).

En la Figura 2, las paredes de un lado del pozo proyectan sombra sobre el fondo. Eratóstenes usó una sombra como ésta para calcular el perímetro de la Tierra. Cuando el sol estaba exactamente sobre Siena (al mediodía del 21 de junio), midió la sombra de un objeto en Alejandría. Conociendo el largo del objeto y el de su sombra, y la distancia entre Siena y Alejandría, calculó el perímetro terrestre. El valor que obtuvo es muy similar al conocido actualmente.

¿Cómo hizo Eratóstenes para determinar el perímetro terrestre?

Miren la Figura 3. Siena está representada por el punto S y Alejandría por el punto A, ambos puntos sobre la superficie de la Tierra a la que se ve como un círculo. En la Figura 3, la longitud de arco entre S y A es d , y el ángulo correspondiente a este arco es θ . El radio de la Tierra es R . Supongamos que los rayos del sol llegan en forma paralela a la Tierra. La Figura 3 corresponde al momento en que el sol está justo sobre la ciudad de Siena. En ese caso, los rayos inciden perpendicularmente a la superficie de la Tierra en la ciudad de Siena, y por lo tanto tienen la misma dirección que el radio de la Tierra que une esta ciudad con el centro de la esfera terrestre.

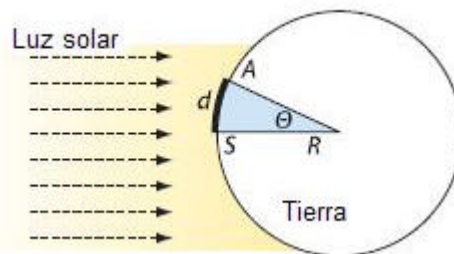


Figura 3:

El sol está exactamente sobre la ciudad de Siena (indicada con una S sobre la superficie de la Tierra). La ciudad de Alejandría está indicada con la letra A.

Cuando el sol se encontraba exactamente sobre la ciudad de Siena, Eratóstenes midió la sombra de una torre en Alejandría, como se muestra en la Figura 4. Es decir, midió dicha sombra al mediodía del 21 de junio. La torre es perpendicular a la superficie de la Tierra en el punto A, y por lo tanto tiene la dirección del radio que une al centro terrestre con el punto A. Dado que el sol se encuentra a gran distancia de la Tierra, todos los rayos del sol llegan a la superficie terrestre prácticamente paralelos entre sí. Por lo tanto, de la Figura 4 se deduce que el ángulo que forman los rayos con la torre es θ , por ser alterno-interno con el que subtiende el arco que une A con S.

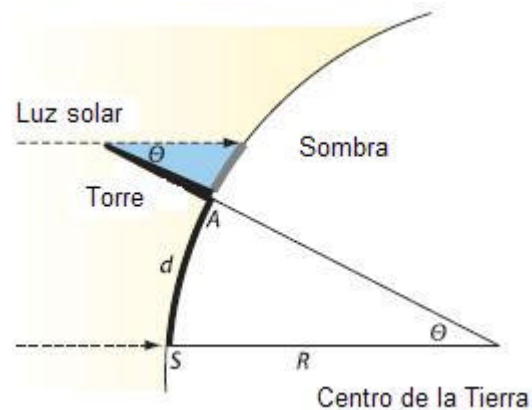


Figura 4:

La geometría del experimento de Eratóstenes. Midió la longitud de una torre y la de su sombra al mediodía del 21 de junio en Alejandría. Luego determinó el ángulo que formaban los rayos del sol con la vertical en esta ciudad. Este ángulo coincide con el que subtiende el arco de circunferencia que une las ciudades de Siena y Alejandría.

Cuando uno está parado en un lugar llano sobre la superficie de la Tierra es difícil percibir su curvatura. Da la sensación de que, más allá de las rugosidades del terreno, uno se encuentra sobre una superficie plana. En cada lugar sobre la superficie de la Tierra, esa superficie plana sobre la que nos da la sensación que caminamos o sobre la que se proyectan las sombras de los distintos objetos, es perpendicular a la vertical en el lugar de la Tierra donde uno se encuentra. Por lo tanto, la sombra de un objeto delgado en posición vertical (como la torre que midió Eratóstenes que se muestra en la Figura 4) y el objeto forman un ángulo recto entre sí. Conociendo el largo de la sombra y la altura de la torre, es posible determinar el ángulo θ . Esto puede hacerse, por ejemplo, dibujando el triángulo sombreado de la Figura 4 sobre un papel, y midiéndolo con un transportador. Otra alternativa, basada en nociones de trigonometría, es utilizar la relación entre la altura de la torre, el largo de su sombra y el ángulo θ :

$$\tan(\theta) = \text{largo de la sombra} / \text{altura de la torre.} \quad (1)$$

Conociendo la tangente del ángulo, $\tan(\theta)$, y sabiendo que θ es menor que 90° , podemos obtener el valor de θ con una calculadora.

Por otro lado, la proporción del perímetro total de la Tierra, P , que representa la longitud de arco, d , que une los puntos S (la ciudad de Siena) y A (la ciudad de Alejandría) sobre la superficie de la Tierra, es igual a la proporción que representa el ángulo θ respecto del ángulo que da una vuelta entera, 360° . De aquí se deduce

$$d / P = \theta / 360 \quad (2)$$

y, despejando el perímetro

$$P = 360 d / \theta. \quad (3)$$

Una vez conocido el perímetro de la Tierra, es muy fácil determinar el radio, R , utilizando la conocida relación

$$R = P / 2$$

Cómo determinar el valor del radio de la Tierra.

Eratóstenes tuvo suerte porque conocía un lugar en donde el sol caía en forma exactamente vertical al mediodía. ¿Podrán ustedes hacer el experimento sin saber dónde hay un lugar así? Afortunadamente sí, como se muestra en las Figuras 5 y 6. Para ello, deberán colaborar con los chicos de otra escuela ubicada aproximadamente sobre el mismo meridiano que la escuela de ustedes, pero a una cierta distancia al norte o al sur (a la que llamamos d) del lugar de su escuela. La coordinación del proyecto les dará la información de con qué escuela pueden colaborar y cuál es el valor de d . Una vez establecido con quien colaborarán, ustedes y los chicos de la escuela con la que colaboran deberán medir el largo y la sombra de una varilla o bastón y compartir el resultado de su medición. El ángulo que se necesita para hacer cálculos similares a los descritos en la sección anterior es en este caso la diferencia entre los ángulos calculados en cada escuela, como explicamos más adelante. Tienen que planificar de antemano cuándo van a medir y combinar con los chicos de la otra escuela. Idealmente, ambas escuelas deben hacer sus mediciones el mismo día.

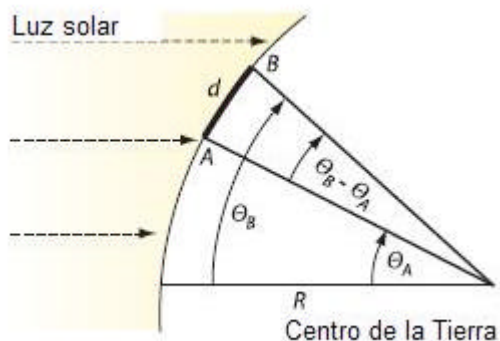


Figura 5:

La geometría para medir el radio de la Tierra usando datos de dos escuelas que colaboran entre sí en la realización del experimento. Las escuelas, ubicadas en los puntos A y B, están separadas por una distancia, d , en la dirección norte-sur. Los alumnos de cada escuela miden el ángulo que forman los rayos del sol con la vertical al mediodía en el lugar donde está su escuela. Llamamos a estos ángulos q_A y q_B . Idealmente, ambas escuelas deben medir este ángulo el mismo día.

En la Figura 5 los puntos A y B corresponden a la ubicación de las dos escuelas que colaboran entre sí. Estos dos puntos deben estar ubicados aproximadamente sobre un mismo meridiano terrestre, es decir, separados por una distancia norte-sur a la que llamamos d en la Figura 5. El experimento va a funcionar mejor cuanto mayor sea d . Miren la Figura 6. Los ángulos que es necesario determinar son q_A y q_B .

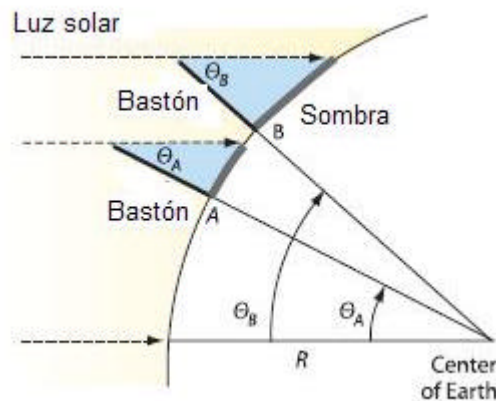


Figura 6:

La relación entre la dirección de los rayos del sol, las varillas y los dos ángulos, q_A y q_B .

Midan la longitud de su varilla y la de la sombra que proyecta, el día acordado con la otra escuela, al mediodía.

Una vez obtenidos los valores del largo de la sombra y del largo de la varilla, dibujen sobre un papel milimetrado un triángulo rectángulo cuyos catetos midan esos valores. El ángulo q_A puede obtenerse directamente midiéndolo con un transportador sobre el papel milimetrado. Si usaron una varilla demasiado larga, puede ser conveniente hacer el dibujo a escala (por ejemplo, reducir las dos longitudes por un factor $\frac{1}{2}$).

Los chicos de la escuela ubicada en B hacen lo mismo y calculan q_B .

Alternativamente, si tienen conocimientos de trigonometría, a partir de las mediciones calculen la tangente del ángulo que forman los rayos del sol con la vertical, q_A , como explicamos antes:

$$\tan(q_A) = \text{largo de la sombra} / \text{largo de la varilla} \quad (4)$$

Obtengan q_A utilizando una calculadora a partir del valor de la tangente. Los chicos de la escuela ubicada en B hacen lo mismo y calculan q_B .

Una vez determinados estos dos ángulos, es muy sencillo obtener el valor del radio terrestre. Las Figuras 5 y 6 muestran que el ángulo que subtiende el arco que une los puntos A y B es la diferencia entre q_A y q_B . Por lo tanto, podemos usar la fórmula (3) reemplazando el perímetro, P, por su expresión en términos del radio, $P = 2\pi R$ y teniendo en cuenta que en lugar del ángulo q debemos usar la diferencia $q_B - q_A$:

$$2\pi R = 360 d / (q_B - q_A) \quad (5)$$

Reacomodando los términos y simplificando obtenemos:

$$R = 180 d / \pi(q_B - q_A) \quad (6)$$

Haciendo la medición al mediodía exacto del lugar donde uno vive.

Cualquiera sea el día del año del que se trate, el mediodía en el lugar donde uno se encuentra es el momento en el que el sol alcanza su altura máxima en el cielo (que no necesariamente es a las 12.00hs!). Para determinarlo, coloquen la varilla con la que harán la medición sobre una base, asegurándose de que esté perfectamente vertical usando una plomada o un nivel de carpintero. Midan el largo de la parte de la varilla que ha quedado sobre la superficie de la base. Cuando la mañana esté suficientemente avanzada, empiecen a medir la longitud de la sombra de la varilla a intervalos regulares. La sombra va a ir disminuyendo a medida que se acerque el mediodía y luego, comenzará a aumentar, cuando el mediodía ya haya pasado (ver Figura 7).

El primer día de medición puede utilizarse para conocer aproximadamente la hora a la que ocurre el mediodía solar. Para ello, midan la longitud de la sombra cada media hora a partir de las 10 de la mañana. Si el resultado de las observaciones es que el mediodía solar ocurre entre las 12.30hs y las 13hs, durante el siguiente día de sol, midan la longitud de la sombra entre las 12.30hs y las 13hs pero esta vez cada 5 minutos. La longitud más corta que hayan medido es el largo de la sombra que deben utilizar en la ecuación (4).

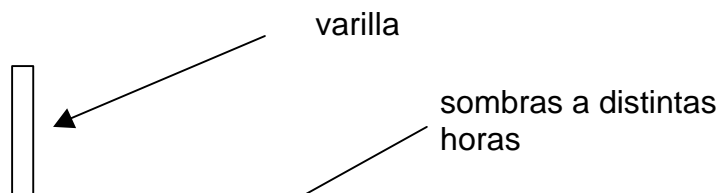


Figura 7 :

La sombra de la varilla se hace más corta justo en el momento del mediodía solar. En ese momento, la sombra apunta hacia el sur.

Algunos consejos para realizar la medición

Pueden utilizar varillas de distintos materiales y tamaños. Para poder obtener un buen resultado, es necesario que la varilla esté colocada sobre una superficie plana (base), y perpendicular a ella.

El tamaño de la varilla puede ser, por ejemplo, de alrededor de 20cm, y la base sobre la que se apoya de 50cm x 30cm. Todas estas medidas pueden cambiarse. Es importante que la varilla no sea demasiado pequeña. Por otra parte, si eligen una varilla más grande (digamos 50cm), la base también tiene que ser mayor para que la sombra no salga de la misma.

La varilla puede ser de plástico o madera. La base puede ser de madera o telgopor, dependiendo del tamaño y peso de la varilla y de la manera que elijan fijarla sobre la base. Para chequear la perpendicularidad de la varilla pueden utilizar una plomada, una escuadra grande, o un nivel de carpintero.

